

Photonenkondensation

Eberhard Müller

Anwendungen zur Quantentheorie des Photons
Forschungskolloquium FH SWF Iserlohn & Universität Dortmund
Beginn: 24. Juni 2009

1. Bose-Einstein-Kondensation

■ Historisches

Albert Einstein entdeckt 1924 bei der Diskussion der Quantentheorie des einatomigen idealen Gases einen fundamental neuen thermodynamischen Phasenübergang. Er sieht dabei eine Analogie zur Kondensation von Dampf ¹⁾. Ausgangspunkt seiner Analyse ist eine von Satyandra Nath Bose vorgeschlagene Quantenstatistik, die eine korrekte thermodynamische Begründung der Planckschen Strahlungsformel ermöglicht ²⁾. Für Einsteins Voraussage einer Kondensation in einem idealen Bose-Gas hat sich der Begriff "Bose-Einstein-Kondensation" eingebürgert. 70 Jahre nach ihrer Veröffentlichung konnte Einsteins Voraussage 1995 in einem ultrakalten Gas von Rubidium-Atomen erstmals experimentell bestätigt werden ³⁾.

Ideales Gas bedeutet, dass eine Wechselwirkung zwischen den Gasmolekülen ausgeschlossen wird. In einem klassischen idealen Gas kann es keinen Phasenübergang geben. Demgegenüber ist in einem Gas, in dem zwischen den Molekülen eine Anziehungskraft wirkt, ein Phasenübergang möglich. Ein Beispiel dafür ist Wasserdampf. Die elektrisch polaren Wassermoleküle üben wechselseitig eine Anziehungskraft aufeinander aus. Es bilden sich Molekülketten. Ist die Wärmebewegung sehr stark, reißen die Ketten auf und die Moleküle bewegen sich einzeln: Das Wasser befindet sich in der Dampfphase. Nimmt die Wärmebewegung ab, kommt es zur Kettenbildung, der Wasserdampf kondensiert. Wasser liegt jetzt auch in der flüssigen Phase vor. Kondensieren und Verdampfen ergeben sich aus dem Zusammenspiel der Dipol-Korrelationen der Wassermoleküle und der Wärmebewegung.

Auch in einem idealen Quantengas werden zwischen den Gasteilchen klassische Kräfte wie Gravitation, elektromagnetische Kräfte oder daraus abgeleitete Kräfte ausgeschlossen. Doch tritt hier mit den sogenannten Quantekorrelationen eine völlig neue Qualität auf. In einem Bose-Gas sind diese Korrelationen

zwischen den Gasteilchen anziehend. Die Bose-Einstein-Kondensation ergibt sich aus dem Wechselspiel von Quantenkorrelationen und Wärmebewegung. Da Quantenkorrelationen extrem schwach sind, tritt Kondensation erst bei äußerst geringer Wärmebewegung auf, also bei extrem tiefen Temperaturen. Neben der Bose-Statistik gibt es noch eine weitere Quantenstatistik, die Fermi-Dirac-Statistik, die bei der Veröffentlichung von Einsteins Paper ¹⁾ noch nicht bekannt ist. Anders als beim idealen Bose-Gas gibt es im idealen Fermi-Gas keinen Phasenübergang.

Der Begriff der Quantenkorrelationen tauchte 1924 noch nicht explizit auf. Er ist aber im Begriff der Quantenstatistik grundsätzlich enthalten. Erst 1935 beschäftigt sich Einstein in einer kritischen Analyse zur Quantenmechanik mit Quantenkorrelationen ganz prinzipiell und macht auf ihre kontra-intuitiven Folgen aufmerksam ⁴⁾. In der Arbeit von 1925 ¹⁾ geht Einstein von einem Bose-Gas bei Sättigungstemperatur aus und fragt: "Was geschieht nun aber, wenn ich bei dieser Temperatur (z. B. durch isotherme Kompression) die Dichte der Substanz noch mehr wachsen lasse? Ich behaupte, daß in diesem Falle eine mit der Gesamtdichte stets wachsende Zahl von Molekülen in den 1. Quantenzustand (Zustand ohne kinetische Energie) übergeht ... Die Behauptung geht also dahin, daß etwas Ähnliches eintritt wie beim isothermen Komprimieren eines Dampfes über das Sättigungsvolumen. Es tritt eine Scheidung ein; ein Teil 'kondensiert', der Rest bleibt ein 'gesättigtes ideales Gas'."

■ Thermodynamischer Limes

Einsteins Folgerung einer Kondensation in einem idealen Bose-Gas scheint ihn erstaunt zu haben. In einem Brief an Paul Ehrenfest schreibt er im Dezember 1924 : "Die Theorie ist hübsch, aber ob auch etwas Wahres dran ist?" ⁵⁾. 1926 erhob George Eugene Uhlenbeck ^{6), 7)} einen gravierenden Einwand gegen die Möglichkeit einer Bose-Einstein-Kondensation: Die Quantisierung der Translationsbewegung lässt in einem endlich großen Behälter nur diskrete Energiezustände zu. Sie sind die Eigenwerte des Laplace-Operators für dieses endliche Gebiet. Damit ist insbesondere der Grundzustand von den angeregten Zuständen separiert. Der für die Kondensation wesentliche Übergang der Gasteilchen in den Grundzustand scheint damit gar nicht möglich zu sein. Uhlenbecks Einwand gegen Einsteins Kondensationshypothese lässt sich mit Hilfe des sogenannten thermodynamischen Limes entkräften, einer mathematischen Idealisierung, bei der das Volumen des Systems gegen Unendlich strebt, wobei die intensiven Größen (Energiedichte, Druck, Teilchendichte, ...) endlich gehalten werden. In dieser Idealisierung werden die volumenrelevanten Aspekte (Bulk-Eigenschaften) eines endlich großen Systems identifizierbar. Im thermodynamischen Limes rücken die Energiezustände des Systems infinitesimal eng zusammen. Dann wird auch ein Übergang in den Grundzustand denkbar.

Die Notwendigkeit des thermodynamischen Limes wurde in einer Diskussion während einer internationalen Konferenz anlässlich des 100. Geburtstags von van der Waals im November 1937 in Amsterdam erkannt, die von Hendrik A. Kramers geleitet wurde (⁶⁾, S. 441). Eine Hälfte der Diskussionsteilnehmer sah darin eine Rechtfertigung von Einsteins Kondensationshypothese, die andere Hälfte nicht. Doch zog Uhlenbeck daraufhin seinen Einwand zurück ⁹⁾.

■ Makroskopische Quanteneffekte von Bosonen

Neben der seit 1995 experimentell nachgewiesenen Einstein-Kondensation materieller Bosonen wie Rubidium-, Natrium- oder Wasserstoffatomen beruhen weitere makroskopische Quanteneffekte auf dem Mechanismus dieses elementaren und fundamentalen Phasenübergangs. Die Diskussion darüber begann nach der 1937 erfolgten Klärung von Einsteins Prognose.

1938 deutete Fritz London das Phänomen der bis dato theoretisch unverstandenen Suprafluidität von Helium mit Hilfe der Bose-Einstein-Kondensation ¹⁰⁾. Für die kritische Temperatur von He^4 ergab sich aus der Theorie ein Wert von 3,13 K, während der experimentell beobachtete Wert bei 2,19 K liegt ¹¹⁾. Der Unterschied zwischen gemessenem und berechnetem Wert lässt sich damit erklären, dass das Helium-Gas kein ideales Gas ist, wie dies für die Bose-Einstein-Kondensation ursprünglich vorausgesetzt ist. Für die Kondensation in einem Gas von wechselwirkenden Bosonen stand keine geeignete Theorie zur Verfügung. Später stellte Lev D. Landau eine zu Fritz Londons Ansatz konkurrierende Beschreibung der Suprafluidität von Helium auf, die nicht auf den Mechanismus der Bose-Einstein-Kondensation zurückgriff. Landaus Theorie fand in der Folge eine stärkere Akzeptanz in der physikalischen Lehre weltweit.

Ein weiteres physikalisches Phänomen, die 1911 von Kamerlingh Onnes entdeckte Supraleitung wurde von Max Robert Schafroth und später von John Blatt als eine Bose-Einstein-Kondensation diskutiert ¹²⁾. Unterhalb einer kritischen Temperatur bilden sich im Supraleiter Elektronenpaare. Der Mechanismus dieser Paarbildung geht auf Herbert Fröhlich zurück ¹³⁾. Während ein einzelnes Elektron mit seinem halbzahligen Spin der Fermi-Dirac-Statistik folgt, haben die Elektronenpaare in sehr guter Näherung ganzzahligen Spin und sind damit der Bose-Statistik unterworfen. Supraleitung tritt ein, wenn Elektronenpaare den Grundzustand besetzen. Die makroskopische Besetzung des Grundzustands ist das Bose-Einstein-Kondensat der Elektronenpaare. Für die Supraleitung wurde danach von John Bardeen, Leon N. Cooper und John R. Schrieffer eine konkurrierende Theorie aufgestellt, für die sich die Bezeichnung BCS-Theorie eingebürgert hat. Für die 1986 entdeckte Hochtemperatur-Supraleitung versagt jedoch die BCS-Theorie. Die Erklärungsreichweite der Bose-Einstein-Kondensation könnte hier größer sein ¹⁴⁾.

Schließlich haben R. Graham und F. Haake 1968 den Laser als eine Bose-Einstein-Kondensation von Photonen erklärt ¹⁵⁾. Für das Pumpen der Photonen im Laser wird ein von Null verschiedenes chemisches Potential eingeführt ¹⁶⁾. Damit lässt sich das Photonengas durch ein großkanonisches Ensemble beschreiben und in diesem Rahmen eine Bose-Einstein-Kondensation diskutieren. Der Laser-Zustand ist der Kondensat-Zustand. Für den Laser hatte sich zuvor schon ein anderer Erklärungszugang etabliert.

2. Photonenkondensation

Photonen sind Elementarteilchen mit Ruhemasse 0 und Spin (Helizität) 1. Für Photonen gilt die Bose-Statistik. Eine Bose-Einstein-Kondensation von Photonen wirft zunächst ein schwerwiegendes konzeptionelles Problem auf. Nach Einstein bedeutet Bosonen-Kondensation, dass ein Teil der Teilchen des Bosonengases in den Zustand mit kinetischer Energie Null übergeht, also den tiefsten Energiezustand makroskopisch besetzt. Photonen, die keine Bewegungsenergie mehr haben, sind aber nicht vorstellbar. Denn im Ruhezustand müssten sie die Masse Null haben. Sie existieren, weil sie mit Lichtgeschwindigkeit fliegen. Wenn etwas Ruhemasse 0, aber keine Bewegungsenergie hat, kann es nicht existieren. Es wäre schlicht nichts vorhanden. So scheint es, dass in einem Photonengas ein Kondensat gar nicht existieren kann.

Nichterhaltung der Photonenzahl

Einsteins ursprüngliche Diskussion hat ein ideales Bose-Gas materieller Teilchen, also Teilchen mit von 0 verschiedener Ruhemasse zum Gegenstand. In diesem System ist die Teilchenzahl kontrollierbar, sie bleibt erhalten. Bei einem Photonengas im Wärmegleichgewicht, wie es beispielsweise in einer Kavität mit gut, aber nicht perfekt reflektierenden Wänden einer bestimmten Temperatur als Wärmestrahlung vorliegt, ist dies anders. Photonen werden von der Wand ständig absorbiert und re-emittiert. Die Photonenzahl ist also nicht erhalten. Die Photonenzahl lässt sich nur im Mittel kontrollieren. Ihr Mittelwert stellt sich in eindeutiger Abhängigkeit von der Temperatur T ein. Im Planckschen Wärmegleichgewicht werden die Mittelwerte aller thermodynamischen Größen durch eine einzige Variable eindeutig bestimmt. Beschrieben wird das Plancksche Wärmegleichgewicht durch ein kanonisches Ensemble mit nicht festgehaltener Teilchenzahl. Ein chemisches Potential μ , Lagrange-Parameter neben der inversen Temperatur $\beta := \frac{1}{kT}$, tritt nicht auf (k steht für die Boltzmann-Konstante). In einem kanonischen Ensemble, mit erhaltener, oder mit nur im Mittel erhaltener Teilchenzahl tritt keine Bose-Einstein-Kondensation auf.

Während Bose für seine Abzählmethode keine festgehaltene Teilchenzahl voraussetzt und seine Methode auf das Photonengas anwendet, hält Einstein in seiner Abhandlung zum idealen Bose-Gas (1) die Teilchenzahl fest. Damit wird die Frage einer möglichen Photonenkondensation gar nicht erst gestellt. Die Nichterhaltung der Photonenzahl muss er gleichwohl gesehen haben. Der Physiker und Einstein-Biograf Abraham Pais hat jedoch bei der Auswertung der wissenschaftlichen Schriften und Korrespondenz von Einstein keinen Hinweis zur Nichterhaltung der Photonenzahl gefunden. Pais vermutet, dass Einsteins Schweigen dazu mit seinem Unbehagen an der Kausalitätsverletzung bei der von ihm 1917 diskutierten spontanen Emission von Photonen zusammenhängt. (Siehe (6), S. 439-440; S. 417-419.) Einstein war der erste, der in der Wahrscheinlichkeit für spontane Emission eine nichtklassische Größe erkannte ((6), S. 418). Eine statistische Aussage zur spontanen Emission verzichtet aber auf strenge Kausalität. Weil Einstein an der Kausalität festhält, lehnt er eine statistische Interpretation der Quantenmechanik ab. Bekannt ist seine Zuspitzung: Gott würfeln nicht ¹⁷⁾.

■ Photonengas in nichtkanonischem thermodynamischem Gleichgewicht

Voraussetzung einer Bose-Einstein-Kondensation in einem Bose-Gas ist, dass mindestens zwei thermodynamische Variable unabhängig voneinander festgelegt werden können. Für die Möglichkeit einer Photonenkondensation muss diese Voraussetzung notwendig erfüllt werden. Dabei reicht es, dass die Mittelwerte der Variablen kontrollierbar sind. Die Nichterhaltung der exakten Photonenzahl oder der exakten Photonenenergie ist dann kein Hindernis. Im Planckschen Wärmegleichgewicht lässt sich nur eine einzige Variable unabhängig vorgeben. Wir brauchen eine Abweichung vom Planckschen Wärmegleichgewicht, die sich durch ein großkanonisches Ensemble mit zwei Lagrangeparametern (β, μ) beschreiben lässt. Eine solche Abweichung lässt sich beispielsweise durch ein stationäres Fließgleichgewicht organisieren: In einen elektromagnetischen Resonator werden Photonen einer bestimmten Frequenz eingestrahlt. Damit baut sich im Resonator ein Energiestau auf, der durch die Frequenz und Leistung der Einstrahlung eingestellt werden kann. Zwischen Einstrahlung und Wärmeabstrahlung durch die Wand des Resonators bildet sich ein Fließgleichgewicht. Die Temperatur der Resonatorwand wird dabei fixiert. Bei geringen Einstrahlungsleistungen wird sich eine nur wenig über der Umgebungstemperatur liegende Wandtemperatur einstellen. Entsprechend wählen wir als unabhängige thermodynamische Variable die Temperatur und die Energiedichte des Photonengases.

■ **Konvergenzrate des chemischen Potentials im thermodynamischen Limes erlaubt makroskopische Besetzung des Grundzustands**

Es bleibt die Paradoxie, die sich für Teilchen mit Ruhemasse 0 mit der Kondensation in den Zustand der Bewegungsenergie Null stellt. Lässt sie sich auflösen?

In einem endlich großen elektromagnetischen Resonator mit reflektierenden Wänden (Dirichlet-Randbedingungen) ist der niedrigste vorkommende Energiewert echt größer Null. Die Photonen, die diesen Zustand besetzen, haben eine von Null verschiedene Energie. Entsprechend ist das chemische Potential des Photonengases von Null verschieden. Mit zunehmender Vergrößerung des Resonators strebt die niedrigste Energie und mit ihr das chemische Potential gegen Null. Dieser Grenzprozess muss im thermodynamischen Limes exakt kontrolliert werden um festzustellen, ob eine makroskopische Besetzung des Grundzustands im Limes entstehen kann. Wenn wir die Temperatur fixieren und die Energiedichte $\bar{u}$ auf einen Wert einstellen, der den Wert für die schwarze Strahlung übertrifft, stellt sich folgendes Grenzverhalten für das chemische Potential μ heraus, wie im weiteren gezeigt werden wird:

$$(1) \quad \mu_R \sim \frac{1}{R^4}$$

Dabei sei R eine charakteristische Länge des Resonators, proportional zur 3. Wurzel aus seinem Volumen V . Das chemische Potential ist also nicht einfach Null, sondern es strebt gegen Null, wenn R über alle Grenzen wächst. Für den tiefsten Energiewert des Resonators gilt folgendes Grenzverhalten:

$$(2) \quad \epsilon_1^R \sim \frac{1}{R}$$

Daraus folgt für den Grundzustand des Photonengases, wenn wir mit

$$(3) \quad u_1 := \bar{u} - u_c$$

den Überschuss des Werts $\bar{u}$ der Energiedichte über den kritischen Wert u_c für die schwarze Strahlung bezeichnen:

$$(4) \quad \frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} \rightarrow u_1 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

Die Besetzung des Grundzustands bleibt im thermodynamischen Limes bestehen: Die Energie der Photonen wird infinitesimal klein, während ihre Anzahl unendlich groß wird und zwar genau in dem Umfang, dass der Grundzustand einen makroskopischen Beitrag zur Energiedichte liefert. So ist das Kondensat der Grenzfall eines laserartigen Zustands.

Ob das chemische Potential von vornherein, also bereits für jeden endlich großen Resonator Null gesetzt wird, oder ob es in einem Limes gegen Null strebt, ergibt einen "subtilen" Unterschied. Dieser Unterschied, der sich in der physikalischen Lehre bisher nicht findet, ist genau die Photonenkondensation. Das gilt im Prinzip für alle Bosonen mit Ruhemasse Null, beispielsweise für Gravitonen (Spin 2), oder für Phononen.

3. Photonenoperator

Sei Δ der Laplace-Operator. Ein nichtrelativistisches freies Teilchen der Masse m wird beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$(1) \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

Dabei ist $\hbar$ das durch 2π geteilte Plancksche Wirkungsquantum h . Der relativistische Hamiltonoperator für ein freies Photon, das sich in einer hinreichend glatten Kavität mit charakteristischer Länge R , Volumen V_R und Oberfläche A_R , an der Dirichlet-Randbedingungen (reflektierende Wände) gelten, bewegt, ist

$$(2) \quad h_R = \hbar c \sqrt{-\Delta}$$

c steht für die Lichtgeschwindigkeit. Der freie Vielteilchen-Photonenoperator H_R ergibt sich aus der Zweitquantisierung $d\Gamma(h_R)$ von h_R .

$$(3) \quad d\Gamma(h_R) = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar \omega_k^R b_k^+ b_k$$

$$(4) \quad H_R = \sum_p \hbar \omega_p^R b_p^+ b_p$$

Der Laufindex $p = (k, \alpha)$ im Vielteilchen-Photonenoperator H_R berücksichtigt neben der Eigenwertabzählung k die beiden möglichen Helizitäten eines Photons (links- oder rechtszirkular polarisiert). Die für Photonen geltende Bose-Statistik wird durch die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren b^+ und b der Photonen implementiert:

$$(5) \quad [b_p^+, b_q] = \delta_{p,q}; \quad [b_p, b_q] = 0$$

Die Eigenwerte des Einteilchenoperators h_R

$$(6) \quad 0 < \epsilon_1^R < \epsilon_2^R \leq \epsilon_3^R \leq \epsilon_4^R \leq \dots, \quad \epsilon_k^R = \hbar \omega_k^R$$

skalieren

$$(7) \quad \epsilon_k^R = \frac{1}{R} \epsilon_k^1$$

Im folgenden benutzen wir die Energiedifferenzen

$$(8) \quad \lambda_k^R = \epsilon_k^R - \epsilon_1^R$$

für die der untere Rand des Spektrums bei 0 liegt.

Die Zahl der Zustände bis zu einem Eigenwert λ heißt integrierte Zustandsdichte ¹⁸⁾:

$$(9) \quad F_R(\lambda) = \frac{1}{V_R} \#\{k: \lambda_k^R \leq \lambda\}$$

Die spektrale Dichtefunktion $F_R'(\lambda)$ ist die Laplace-Transformierte der normierten Zustandsfunktion $\Phi_R(\beta)$:

$$(10) \quad F_R(\lambda) =: \int_0^\lambda F_R'(\xi) d\xi = \int_0^\lambda dF_R(\xi)$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \Phi_R(\beta) &:= \frac{1}{V_R} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta \lambda_k^R} \\ &= \int_0^\infty e^{-\beta \lambda} dF_R(\xi) = \int_0^\infty e^{-\beta \lambda} F_R'(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Die zur Energievariablen λ bezüglich der Laplacetransformation konjugierte Variable β lässt sich physikalisch als inverse Temperatur identifizieren: $\beta := \frac{1}{kT}$.

Für den nichtrelativistischen Einteilchenoperator (1) gilt (siehe (5b) in ¹⁹⁾):

$$(12) \quad dF_R(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} d\lambda - \frac{A_R}{16\pi V_R} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) d\lambda + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} R^2} \right) d\lambda$$

und für den relativistischen Operator h_R gilt (siehe (6b) in ¹⁹⁾):

$$(13) \quad dF_R(\lambda) = \frac{1}{\pi^2} (\hbar c)^{-3} \lambda^2 d\lambda - \frac{A_R}{4\pi V_R} (\hbar c)^{-2} \lambda d\lambda + O(R^{-2})$$

Die mathematischen Untersuchungen zur spektralen Dichte des Laplace-Operators gehen auf Hermann Weyl zurück ²⁰⁾. Nach einem Artikel von Marc Kac ²¹⁾ gab es eine Vielzahl von Arbeiten, die Weyls Resultat verfeinerten ^{22), 23)}. Die Forschungsgruppe von John Lewis am Dublin Institute for Advanced Studies nutzte das Resultat von Marc Kac.

4. Thermodynamik des Photonengases

Der Erwartungswert einer Observablen A im kanonischen Zustand mit variabler Teilchenzahl ist

$$(1) \quad \mathbb{E}_{\beta}^R[A] := \text{Tr}[D_{\beta}^R A]; \quad D_{\beta}^R := \frac{e^{-\beta H_R}}{\text{Tr}[e^{-\beta H_R}]}$$

Der Erwartungswert einer Observablen A im großkanonischen Zustand mit variabler Teilchenzahl ist

$$(2) \quad \mathbb{E}_{\beta, \mu}^R[A] := \text{Tr}[D_{\beta, \mu}^R A]; \quad D_{\beta, \mu}^R := \frac{e^{-\beta(H_R - \mu N_R)}}{\text{Tr}[e^{-\beta(H_R - \mu N_R)}]}$$

D_{β}^R ist der kanonische Dichteoperator, $D_{\beta, \mu}^R$ ist der großkanonische Dichteoperator. N_R ist der Teilchenzahloperator in der Kavität:

$$(3) \quad N_R = \sum_p b_p^{\dagger} b_p$$

Das kanonische Ensemble ergibt sich aus dem großkanonischen durch Null Setzen des chemischen Potentials μ .

Die Photonenzahldichte $\rho^R(\beta, \mu)$, die Energiedichte $u^R(\beta, \mu)$ und der Druck $p^R(\beta, \mu)$ ergeben sich für das großkanonische Ensemble wie folgt:

$$(4) \quad \rho^R(\beta, \mu) = \mathbb{E}_{\beta, \mu}^R\left[\frac{N_R}{V_R}\right] = \frac{1}{V_R} \sum_p \frac{1}{(e^{\beta(\lambda_p^R - \mu)} - 1)}$$

$$(5) \quad u^R(\beta, \mu) = \mathbb{E}_{\beta, \mu}^R\left[\frac{H_R}{V_R}\right] = \frac{1}{V_R} \sum_p \frac{(\lambda_p^R + \epsilon_1^R)}{(e^{\beta(\lambda_p^R - \mu)} - 1)}$$

$$(6) \quad p^R(\beta, \mu) = \frac{1}{\beta V_R} \ln \Xi_R(\beta, \mu)$$

$$(6.a) \quad \Xi_R(\beta, \mu) := \text{Tr}[e^{-\beta(H_R - \mu N_R)}]$$

$$= \text{Tr}[e^{-\beta \sum_p (\lambda_p^R - \mu) b_p^{\dagger} b_p}]$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_p \sum_{n_p} e^{-\beta(\lambda_p^R - \mu) n_p} \\
&= \prod_p \frac{1}{1 - e^{-\beta(\lambda_p^R - \mu)}}
\end{aligned}$$

Zur Auswertung der Spur Tr im Vielteilchen-Hilbertraum (Fockraum) siehe beispielsweise ²⁴⁾, S. 157 und S. 110. Beim Übergang zur vierten Gleichung in (6.a) wird die geometrische Reihe summiert. Wegen der Entartung der Eigenwerte bezüglich der Helizität gilt $\lambda_k^R = \lambda_p^R$. Steht der Index p , muss bei der Summierung doppelt gezählt werden. (6.a) definiert die großkanonische Zustandssumme. In dieser Definition ist die Zustandsgleichung des idealen Gases enthalten:

$$\begin{aligned}
(6.b) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} p^R(\beta, \mu) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{1}{\beta V_R} \ln \Xi_R(\beta, \mu) \\
&= \frac{1}{\beta V_R} \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_p \ln \left(1 - e^{-\beta(\lambda_p^R - \mu)} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{V_R} \sum_p e^{-\beta(\lambda_p^R - \mu)} \left(1 - e^{-\beta(\lambda_p^R - \mu)} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{V_R} \sum_p \left(e^{\beta(\lambda_p^R - \mu)} - 1 \right)^{-1} \\
&= \rho^R(\beta, \mu)
\end{aligned}$$

5. Thermodynamischer Limes

Im thermodynamischen Limes $R \rightarrow \infty$ strebt das Volumen des Systems gegen Unendlich, und es ergibt sich die Kontinuum-Spektrum-Approximation. Die Idealisierung stellt sicher, dass sich Phasenübergänge präzise identifizieren lassen und nicht Artefakte einer Näherung sind. Wir werden beim Limes den Wert der Energiedichte und die Temperatur vorgeben. Die Funktion der großkanonischen Energiedichte wird, wie folgt, umgeformt. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit sei die Helizität nicht explizit markiert.

$$\begin{aligned}
u^R(\beta, \mu_R) &= \frac{1}{V_R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k^R + \epsilon_1^R)}{(e^{\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} - 1)} \\
&= \frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \frac{1}{V_R} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda_k^R + \epsilon_1^R)}{(e^{\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} - 1)} \\
&= \frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \frac{1}{V_R} \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_k^R + \epsilon_1^R) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} \\
&= \frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\beta\mu_R} \frac{1}{V_R} \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_k^R + \epsilon_1^R) e^{-n\beta\lambda_k^R} \\
&= \frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\beta\mu_R} \int_{\epsilon_2^R}^{\infty} (\lambda + \epsilon_1^R) e^{-n\beta\lambda} dF_R(\lambda)
\end{aligned}$$

Es gilt die Voraussetzung, dass ϵ_2^R strikt größer ist als ϵ_1^R . Damit ist λ_2^R strikt größer als Null. Da $\mu_R \leq 0$, lassen sich die Summenterme in der zweiten Zeile der obigen Umformung jeweils als geometrische Reihe schreiben. Die Summe über k existiert gleichmäßig bezüglich n , so dass in der dritten Zeile die Summierung über die Indices k und n vertauscht werden darf. Die Summe über die angeregten Zustände (excited states) fassen wir zusammen:

$$(7) \quad u_e^R(\beta, \mu_R) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\beta\mu_R} \int_{\epsilon_2^R}^{\infty} (\lambda + \epsilon_1^R) e^{-n\beta\lambda} dF_R(\lambda)$$

Die Auswertung des Integrals ergibt mit (3.13):

$$\begin{aligned}
(8) \quad \int_0^{\infty} \lambda e^{-n\beta\lambda} dF_R(\lambda) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-n\beta\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} - \frac{A_R}{V_R} \frac{\lambda}{4\pi \hbar^2 c^2} + \dots \right) d\lambda \\
&= \frac{6}{\pi^2 \hbar^3 c^3 \beta^4} \frac{1}{n^4} - \frac{A_R}{V_R} \frac{2}{4\pi \hbar^2 c^2 \beta^3} \frac{1}{n^3} + \dots
\end{aligned}$$

Im thermodynamischen Limes ergibt sich damit der Beitrag (7) der angeregten Zustände zur Energiedichte, ohne Berücksichtigung des Oberflächenterms:

$$\begin{aligned}
(9) \quad u_e(\beta, \mu) &= \lim_{R \rightarrow \infty} u_e^R(\beta, \mu) \\
&= \frac{6}{\pi^2 \hbar^3 c^3 \beta^4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\beta\mu_R} \frac{1}{n^4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{\pi^2 \hbar^3 c^3 \beta^4} g_4(e^{\beta\mu})$$

$$(10) \quad g_\alpha(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$$

$$(11) \quad \zeta(\alpha) := g_\alpha(1)$$

ist die Riemannsche Zeta-Funktion.

Für den Strahlungsdruck (6) gilt (auch hier ohne explizite Markierung der Helizität):

$$\begin{aligned} (12) \quad p^R(\beta, \mu_R) &= \frac{1}{\beta V_R} \ln \Xi_R(\beta, \mu_R) \\ &= \frac{1}{\beta V_R} \sum_k \ln \left(1 - e^{-\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\beta V_R} \ln \left(1 - e^{\beta\mu_R} \right)^{-1} + \frac{1}{\beta V_R} \sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\beta V_R} \ln \left(1 - e^{\beta\mu_R} \right)^{-1} + \frac{1}{\beta V_R} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_n \frac{1}{n} e^{-n\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile von (12) wurde die Summenentwicklung für die Logarithmus-Funktion benutzt, wobei $e^{-\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} < 1$ für $k \geq 2$. Für den Beitrag der angeregten Zustände zum Strahlungsdruck gilt:

$$\begin{aligned} (13) \quad p_e^R(\beta, \mu_R) &= \frac{1}{\beta V_R} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_n \frac{1}{n} e^{-n\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} \\ &= \frac{1}{\beta V_R} \sum_n \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} e^{-n\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{n} e^{n\beta\mu_R} \int_{\epsilon_2^R}^{\infty} e^{-n\beta\lambda} dF_R(\lambda) \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{n} e^{n\beta\mu_R} \int_{\epsilon_2^R}^{\infty} e^{-n\beta\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} - \frac{A_R}{V_R} \frac{\lambda}{4\pi \hbar^2 c^2} + \dots \right) d\lambda \end{aligned}$$

Ohne Berücksichtigung des Oberflächenterms ergibt sich im thermodynamischen Limes:

$$\begin{aligned}
 (14) \quad p_e(\beta, \mu) &= \lim_{R \rightarrow \infty} p_e^R(\beta, \mu) \\
 &= \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{n} e^{n\beta\mu} \int_0^\infty e^{-n\beta\lambda} \frac{\lambda^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} d\lambda \\
 &= \frac{1}{\beta \pi^2 \hbar^3 c^3} \sum_n \frac{1}{n} e^{n\beta\mu} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-n\beta\lambda} d\lambda \\
 &= \frac{1}{\beta \pi^2 \hbar^3 c^3} \sum_n \frac{1}{n} e^{n\beta\mu} \frac{2}{(n\beta)^3} \\
 &= \frac{2}{\beta^4 \pi^2 \hbar^3 c^3} g_4(e^{\beta\mu})
 \end{aligned}$$

$$(15) \quad p_e(\beta, \mu) = \frac{1}{3} u_e(\beta, \mu)$$

Die Auswertung der Teilchendichte (4) ergibt:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \rho^R(\beta, \mu_R) &= \frac{1}{V_R} \sum p \frac{1}{(e^{\beta(\lambda_p^R - \mu)} - 1)} \\
 &= \frac{1}{V_R} \frac{1}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \frac{1}{V_R} \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{(e^{\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} - 1)} \\
 &= \frac{1}{V_R} \frac{1}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \frac{1}{V_R} \sum_{k=2}^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-n\beta(\lambda_k^R - \mu_R)} \\
 &= \frac{1}{V_R} \frac{1}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \sum_{n=1}^\infty e^{n\beta\mu_R} \frac{1}{V_R} \sum_{k=2}^\infty e^{-n\beta\lambda_k^R} \\
 &= \frac{1}{V_R} \frac{1}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} + \sum_{n=1}^\infty e^{n\beta\mu_R} \int_{\epsilon_2^R}^\infty e^{-n\beta\lambda} dF_R(\lambda)
 \end{aligned}$$

Auch hier fassen wir die angeregten Beiträge zur Teilchendichte zusammen.

$$(17) \quad \rho_e^R(\beta, \mu_R) = \sum_{n=1}^\infty e^{n\beta\mu_R} \int_{\epsilon_2^R}^\infty e^{-n\beta\lambda} dF_R(\lambda)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\beta\mu_R} \int_{\epsilon_2^R}^{\infty} e^{-n\beta\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} - \frac{A_R}{V_R} \frac{\lambda}{4\pi \hbar^2 c^2} + \dots \right) d\lambda$$

Ohne Berücksichtigung der Oberflächenterme ergibt sich im thermodynamischen Limes

$$\begin{aligned} (18) \quad \rho_e(\beta, \mu) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \rho_e^R(\beta, \mu) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\beta\mu} \int_0^{\infty} e^{-n\beta\lambda} \frac{\lambda^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\beta\mu} \frac{2}{(n\beta)^3} \\ &= \frac{2}{\pi^2 \beta^3 \hbar^3 c^3} g_3(e^{\beta\mu}) \end{aligned}$$

■ **Großkanonisches Photonengas im thermodynamischen Limes bei vorgegebener Temperatur und mittlerer Energiedichte**

Der thermodynamische Limes sei weiterhin durch die Vorgabe der Temperatur β und der Energiedichte $\bar{u}$ definiert. Das chemische Potential μ_R im endlich großen Resonator mit dem Volumen V_R und der charakteristischen Länge R sei gegeben durch

$$(19) \quad u^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) := \bar{u}.$$

Wir definieren für den Grenzfall des thermodynamischen Limes die Größe μ wie folgt:

$$\begin{aligned} (20) \quad u_e(\beta, \mu(\beta, \bar{u})) &:= \bar{u}, & \text{falls } \bar{u} \leq u_c(\beta) &:= u_e(\beta, 0), \\ \mu(\beta, \bar{u}) &:= 0, & \text{falls } \bar{u} > u_c(\beta). \end{aligned}$$

Sei

$$(21) \quad u_g^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) := \frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)}$$

der Beitrag des Grundzustands zur mittleren Energiedichte.

Dann gilt (Theorem 4 in ^{19.a)}):

$$(22) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \mu_R(\beta, \bar{u}) = \mu(\beta, \bar{u});$$

$$(23) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} u_g^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) = (\bar{u} - u_c(\beta))^+$$

$$(24) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} p^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) = p_e(\beta, \mu(\beta, \bar{u}))$$

$$(25) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \rho^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) = \begin{cases} \rho_e(\beta, \mu(\beta, \bar{u})), & \text{falls } \bar{u} \leq u_c(\beta), \\ \infty, & \text{falls } \bar{u} > u_c(\beta); \end{cases}$$

mit der Notation

$$x^+ := \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zur Herleitung der Resultate (23) - (25) sind folgende Beobachtungen wesentlich.

$$(26.a) \quad u_e(\beta, \mu) \leq u_e(\beta, 0) \quad \text{für } \mu \leq 0$$

$$(26.b) \quad p_e(\beta, \mu) \leq p_e(\beta, 0) \quad \text{für } \mu \leq 0$$

$$(26.c) \quad \rho_e(\beta, \mu) \leq \rho_e(\beta, 0) \quad \text{für } \mu \leq 0$$

Das chemische Potential μ bezieht sich auf das Spektrum (3.8) mit der Unterkante Null. Deshalb gilt $\mu \leq 0$.

Sei $u_1 = \bar{u} - u_c > 0$. Dann ist im Limes $\mu(\beta, \bar{u}) = 0$, gemäß (20) und (22). Für den Beitrag des Grundzustands zur Energiedichte gilt im Limes:

$$\frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} \sim \frac{1}{R^4} \frac{\epsilon_1^1}{-\beta\mu_R + \dots} \sim u_1$$

$$\Rightarrow \quad -\mu_R \sim \frac{1}{R^4} \quad (2.1)$$

Mit diesem Limesverhalten ergeben sich die Grenzwerte der Beiträge des Grundzustands zum Druck und zur Teilchendichte:

$$\begin{aligned}
(27) \quad p_g^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) &:= \frac{1}{\beta V_R} \ln(1 - e^{\beta \mu_R})^{-1} \\
&\sim \frac{1}{R^3} (-\ln(-\beta \mu_R + \dots)) \\
&\sim \frac{1}{R^3} (-\ln(\beta) - \ln(-\mu_R) + \dots) \\
&\sim \frac{1}{R^3} (-\ln(-\mu_R)) \\
&\sim \frac{1}{R^3} (-\ln(\frac{1}{R^4})) \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
(29) \quad \rho_g^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) &= \frac{1}{V_R} \frac{1}{(e^{-\beta \mu_R} - 1)} \\
&\sim \frac{1}{R^3} \frac{1}{(-\beta \mu_R + \dots)} \\
&\sim \frac{1}{R^3} \frac{1}{\frac{1}{R^4}} \\
&\sim R \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

(27) bedeutet, dass in diesem Limes der Grundzustand nicht zum Strahlungsdruck beiträgt.

(29) bedeutet, dass in diesem Limes bei überkritischer Energiedichte die Photonenzahldichte im Grundzustand divergiert. Das ist die sogenannte Infrarot-Katastrophe. Während die Photonenzahldichte über alle Grenzen anwächst, strebt die Energie der einzelnen Photonen im Grundzustand gegen Null derart, dass die Energiedichte endlich bleibt.

Die Gleichungen (19), (20), (22) bis (25) beschreiben die thermodynamischen Funktionen eines großkanonischen Photonengases in der Volumenidealisierung, d. h. im thermodynamischen Limes: Energiedichte, Strahlungsdruck, Teilchendichte, Temperatur, chemisches Potential. Der Vollständigkeit halber geben wir auch die großkanonische Entropiedichte an:

$$(30) \quad s^R(\beta, \tilde{\mu}_R) = k\beta \{u^R(\beta, \tilde{\mu}_R) - \tilde{\mu}_R \rho^R(\beta, \tilde{\mu}_R) + p^R(\beta, \tilde{\mu}_R)\}$$

Das chemische Potential bedeutet diejenige Energie, um die sich die Gesamtenergie des Systems ändert, wenn ein nicht angeregtes Teilchen hinzugefügt wird. Im Fall des Photonengases bedeutet dies, dass ein Photon im Grundzustand hinzugefügt wird. Bezüglich des reduzierten Spektrums (3.8) haben wir das zugehörige chemische Potential mit μ_R bezeichnet. Bezüglich des Spektrums (3.6) sei das chemische Potential mit $\tilde{\mu}_R$ bezeichnet. Damit gilt der Zusammenhang

$$(31.a) \quad \tilde{\mu}_R = \mu_R + \epsilon_1^R$$

Es gilt natürlich

$$(31.b) \quad \epsilon_k^R - \tilde{\mu}_R = \lambda_k^R - \mu_R, \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

In den thermodynamischen Funktionen (4.4) bis (4.6) können wir die rechte Seite von (31.b) mit dem reduzierten Spektrum verwenden, wenn wir, wie geschehen, für die Energie des Grundzustands explizit ϵ_1^R benutzen. In (30) tritt das chemische Potential als eigenständiger Faktor auf. Ein Bezug zum reduzierten Spektrum (3.8) ist dann nicht möglich. Deshalb muss in (30) das auf das nicht-reduzierte Spektrum (3.6) bezogene $\tilde{\mu}_R$ benutzt werden. Für den Grundzustand ergibt die Differenz $u^R(\beta, \tilde{\mu}_R) - \tilde{\mu}_R \rho^R(\beta, \tilde{\mu}_R)$ auf der rechten Seite von (30):

$$(32) \quad \frac{1}{V_R} \frac{\epsilon_1^R}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} - (\mu_R + \epsilon_1^R) \frac{1}{V_R} \frac{1}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)}$$

$$= -\mu_R \frac{1}{V_R} \frac{1}{(e^{-\beta\mu_R} - 1)} \sim \frac{1}{R^3} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

Zusammen mit den vorausgehenden Limesresultaten für den Strahlungsdruck und für den Beitrag der angeregten Zustände zu Energie- und Photonenzahldichte ergibt sich für die Entropiedichte im thermodynamischen Limes

$$(33) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} s^R(\beta, \mu_R(\beta, \bar{u})) = k\beta \{u_e(\beta, \mu(\beta, \bar{u})) + p_e(\beta, \mu(\beta, \bar{u}))\}$$

$$= \frac{4}{3} k\beta u_e(\beta, \mu(\beta, \bar{u}))$$

In der zweiten Gleichung benutzen wir (15). Das Limesresultat (33) zeigt, dass der Grundzustand nicht zur Entropiedichte beiträgt: Bei überkritischer Energiedichte ist der Beitrag des Kondensats zur Entropiedichte Null. Dies ist ein Indiz für die laserartige Kohärenz des Kondensats.

(33) korrigiert Gleichung (27) in ^{19.a)}. Auf diese Korrektur war bereits in Abschnitt 5 in ^{19.b)} hingewiesen worden.

6. Photonengas im stationären Fließgleichgewicht

Eine Abweichung eines Photonengases vom Planckschen Wärmegleichgewicht soll durch ein stationäres Fließgleichgewicht so realisiert werden, dass zwei thermodynamische Variable unabhängig voneinander kontrollierbar sind. Dazu betrachten wir einen elektromagnetischen Resonator mit dem Volumen V und der Oberfläche A . Die Wandtemperatur habe den Wert T_1 . Elektromagnetische Strahlung wird von einem Sender in den Resonator eingekoppelt. Der eingestrahlte Photonenfluß sei mit J , die eingestrahlte Photonenleistung mit P bezeichnet. Die Energieeinstrahlung vom Sender und die Wärmestrahlung der Resonatorwände in den Resonatorraum ergeben zusammen die Einstrahlungsleistung

$$(1) \quad \sigma T_1^4 A \alpha_{Ab} + P$$

σ steht für die Stefan-Boltzmann-Konstante, α_{Ab} für den Absorptions- und Emissionskoeffizienten der Resonatorwand. Die mittlere freie Weglänge, die ein Photon zwischen zwei Reflektionen durchschnittlich zurücklegt, beträgt

$$(2) \quad \frac{4V}{A}$$

Sei $E(t)$ die aktuelle Strahlungsenergie im Hohlraum. Die auf die Wand auftreffende Strahlungsleistung ergibt sich aus der Energie $E(t)$, die während der freien Laufzeit $\frac{4V}{cA}$ im Mittel einmal auf die Wand trifft. Damit beträgt die absorbierte Leistung

$$(3) \quad E(t) \frac{cA}{4V} \alpha_{Ab}$$

Mit (1) und (3) ergibt sich die Ratengleichung für die Strahlungsenergie im Resonator zu

$$(4) \quad dE = \sigma T_1^4 A \alpha_{Ab} dt + P dt - E(t) \frac{cA}{4V} \alpha_{Ab} dt$$

Integration ergibt die Lösung

$$(5) \quad E(t) = (\sigma T_1^4 A \alpha_{Ab} + P) \frac{4V}{c A \alpha_{Ab}} (1 - e^{-\frac{c A \alpha_{Ab}}{4V} t})$$

Entsprechend ergibt sich für die Photonenzahl

$$(6) \quad N(t) = (\sigma T_1^3 A \alpha_{Ab} \frac{g_3(1)}{g_4(1)} \frac{1}{3k} + J) \frac{4V}{c A \alpha_{Ab}} (1 - e^{-\frac{c A \alpha_{Ab}}{4V} t})$$

Dies lässt sich aus dem Vergleich von (5.18) und (5.9) für $\mu = 0$ ablesen. Die expliziten Funktionswerte der Riemannschen Zetafunktion sind

$$g_3(1) = 1,20206; \quad g_4(1) = \frac{\pi^4}{90}$$

Die Gleichgewichtswerte der Energiedichte $\frac{E(\infty)}{V}$ und der Photonenzahldichte $\frac{N(\infty)}{V}$ sind

$$(7) \quad u(T_1, P) = (\sigma T_1^4 A \alpha_{Ab} + P) \frac{4}{c A \alpha_{Ab}}$$

$$(8) \quad \rho(T_1, J) = (\sigma T_1^3 A \alpha_{Ab} \frac{g_3(1)}{g_4(1)} \frac{1}{3k} + J) \frac{4}{c A \alpha_{Ab}}$$

Ein kleines Thermometer im Gleichgewicht mit der Strahlung würde eine mittlere Photonenenergie registrieren und entsprechend die folgende Temperatur T ergeben:

$$(9) \quad \frac{u(T_1, P)}{\rho(T_1, J)} =: 3 kT \frac{g_4(1)}{g_3(1)}$$

Diese mittlere Temperatur der Strahlungsphase impliziert eine kritische Energiedichte, die Energiedichte der schwarzen Strahlung:

$$(10) \quad u_c(T) = \frac{4}{c} \sigma T^4$$

$$= \frac{4}{c} \sigma g_3(1)^4 (3 k g_4(1))^{-4} \left(\frac{u}{\rho} \right)^4$$

Kondensation tritt ein, falls

$$(11) \quad \frac{u}{u_c(T)} > 1$$

d. h. falls

$$(12) \quad \frac{c}{4\sigma} \left(\frac{3k g_4(1)}{g_3(1)} \right)^4 \frac{\rho^4}{u^3} > 1$$

(7) und (8) in (12) eingesetzt ergibt als Kondensationskriterium eine Beziehung zwischen der Wandtemperatur T_1 , dem Photonenfluß J und der Photonenleistung P :

$$(13) \quad \frac{1}{\sigma A \alpha_{Ab}} \frac{\left(\sigma T_1^3 A \alpha_{Ab} + J \frac{3k g_4(1)}{g_3(1)} \right)^4}{(\sigma T_1^4 A \alpha_{Ab} + P)^3} > 1$$

7. Zum Mechanismus der Umverteilung der Photonen

Photonenkondensation heißt, dass die die kritische Energiedichte $u_c(T)$ überschreitenden Photonen spontan in den Grundzustand des Resonators übergehen. Ein solcher Umverteilungsmechanismus ist über die Wechselwirkung der Photonen mit der Resonatorwand möglich. Da die Güte der Kavität einen endlichen Wert hat, kommt es zu einer Ausschmierung der Resonanzen und damit zu einem Überlappen der Resonanzkurven. Dies hat endlich große Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Resonanzzuständen zur Folge. Eine Kavität, die Photonenkondensation zulassen soll, muss so konstruiert werden, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten die Absorptionswahrscheinlichkeiten übertreffen.

Die Oszillationen des elektromagnetischen Feldes lassen sich unter Berücksichtigung der Dämpfung für eine Resonanz k wie folgt angeben (²⁵), S. 357 ff.):

$$(1) \quad f_k(t) \sim e^{i(\omega_k + \Delta\omega)t - \frac{\omega_k t}{2Q_k}}$$

Mit Jackson (²⁵), S. 360) setzen wir

$$(2) \quad \Delta\omega = \frac{-\omega_k}{2Q_k}$$

Für den Gütefaktor ergibt sich (²⁵), S. 359)

$$(3) \quad Q_k = \sqrt{\mu_0 \sigma_L \omega_k / 2} \frac{V}{A}$$

σ_L ist die Leitfähigkeit des Wandmaterials, μ_0 die magnetische Feldkonstante. Die Fouriertransformierte zu (1) ist

$$(4) \quad f_k(\omega) \sim \frac{1}{-i(\omega - \omega_k - \Delta\omega) - \frac{\omega_k}{2Q_k}}$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang $\omega_k \rightarrow \omega_l$ ist

$$(5) \quad T_{\text{ampl}}(\omega_k, \omega_l, Q_k) = \frac{\int_0^\infty f_k(\omega) f_l^{\text{cc}}(\omega) d\omega}{\sqrt{\int_0^\infty f_k(\omega) f_k^{\text{cc}}(\omega) d\omega} \sqrt{\int_0^\infty f_l(\omega) f_l^{\text{cc}}(\omega) d\omega}}$$

f^{cc} steht für das konjugiert Komplexe von f . Die Übergangswahrscheinlichkeit T_{prob} ergibt sich durch die Multiplikation der Wahrscheinlichkeitsamplitude (5) mit ihrem konjugiert Komplexen:

$$(6) \quad T_{\text{prob}}(\omega_k, \omega_l, Q_k) = T_{\text{ampl}}(\omega_k, \omega_l, Q_k) T_{\text{ampl}}^{\text{cc}}(\omega_k, \omega_l, Q_k)$$

Die Auswertung von (6) für konkrete Konfigurationen von Kavitäten lässt sich beispielsweise mit Hilfe des Rechenprogramms *Mathematica* vornehmen.

■ Konkurrenz zwischen Übergangswahrscheinlichkeit und Absorption

Ein Mechanismus zur Nettoumverteilung von Photonen höherer Frequenzen in Photonen tieferer Frequenzen, wie er für eine Bose-Einstein-Kondensation von Photonen notwendig ist, ist genau dann möglich, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Resonanzen immer größer sind als die Absorptionswahrscheinlichkeiten. Gemäß (4) ergibt sich, mit einem Normierungsfaktor N , die Formfunktion der Resonanz k zu

$$(7) \quad |f_k(\omega)|^2 = \frac{1}{N^2} \frac{1}{(\omega - \omega_k - \Delta\omega)^2 + \left(\frac{\omega_k}{2Q_k}\right)^2}$$

Die Formfunktion (7) nimmt für $\omega = \omega_k + \Delta\omega$ den Maximalwert

$$(8) \quad |f_k(\omega_k)|^2 = \frac{1}{N^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_k}{2Q_k}\right)^2}$$

an. Die Halbwertsbreite folgt aus

$$(9) \quad |f_k(\omega)|^2 = \frac{1}{2N^2} \left(\frac{2Q_k}{\omega_k} \right)^2$$

zu

$$(10) \quad 2(\omega - \omega_k - \Delta\omega) = \frac{\omega_k}{Q_k}$$

Die Zerfallszeit $\frac{\omega_k}{Q_k}$ in die Photonenfunktion (1) eingesetzt gibt an, wie lange es dauert, bis sie auf $\frac{1}{e}$ abklingt. D. h. nach

$$(11) \quad \frac{Q_k}{\omega_k}$$

Sekunden beträgt die Absorptionswahrscheinlichkeit der Photonen einer Resonanz

$$(12) \quad 1 - \frac{1}{e} = 63,2 \%$$

Die Zerfallszeit (11) gibt gleichzeitig die Zeitskala für Photonenübergänge zwischen den Resonanzen.

■ Kriterium

Sind alle Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen benachbarten Resonanzen eines Resonators größer als (12), ergibt sich ein Umverteilungsüberschuss. Dieses Kriterium ist Konstruktionsmerkmal einer Kavität, in der sich eine Photonenkondensation erzielen lässt.

Literatur

- ¹⁾ A. Einstein: "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases". Zweite Abhandlung. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1925. I., S. 3-14. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 8. Januar. (Zitiert nach dem Wiederabdruck durch die Akademie der Wissenschaften der DDR. Akademie-Verlag, Berlin, 1978.)
- ²⁾ Satyandra Nath Bose, Zeitschrift für Physik **26**, 1924, S. 178 ff.
- ³⁾ M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wiemann, E. A. Cornell:
"Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor". Science 269, 1995, S. 198-201.
- ⁴⁾ Albert Einstein, Boris Podolski, Nathan Rosen:
"Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?"
Physical Review 47, 1935, S. 777 ff.
- ⁵⁾ Albert Einstein, Brief an Paul Ehrenfest, 29. November 1924. (Zitiert nach (6), S. 440.)
- ⁶⁾ Abraham Pais: "Raffiniert ist der Herrgott ..." Albert Einstein. Eine wissenschaftliche Biographie. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- ⁷⁾ G. E. Uhlenbeck, Thesis. Leiden, 1927. Zitiert in (8).
- ⁸⁾ John T. Lewis: "Why do Bosons Condense?" DIAS-STP-86-12,
Dublin Institute for Advanced Studies, School of Theoretical Physics, 1986.
- ⁹⁾ B. Kahn, G. E. Uhlenbeck. On the theory of condensation. Physica **5**, 1938, S. 399-415.
- ¹⁰⁾ Fritz London, Nature **141**, 1938, S. 643. Physical Review **54**, 1938, S. 947.
- ¹¹⁾ John Lewis: "Do Bosons Condense?" DIAS Statuary Public Lecture, Trinity College, Dublin,
10.12.1986.
- ¹²⁾ M. R. Schafroth *), Physical Review **96**, 1954, S. 1149, S. 1442. Physical Review **100**, 1955, S. 463.
M. R. Schafroth, S. T. Butler, J. M. Blatt, Helvetica Physica Acta **30**, 1957, S. 93.
John Blatt, Theory of Superconductivity, Academic Press, New York, 1964.

^{*)} Max Robert Schafroth, * 1923 in Burgdorf im Emmental, Kanton Bern, kam am 29.05.1959 zusammen mit seiner Frau bei einem Flugzeugabsturz in Australien ums Leben. Zum 01.09.1959 hätte er den Lehrstuhl für Theoretische Physik an der Universität Genf übernehmen sollen. Er war von 1950 bis 1953 Assistent von Wolfgang Pauli. Nach 1953 hatte er eine Forschungszusammenarbeit mit Herbert Fröhlich, Liverpool, auf den der Mechanismus der Elektronenpaarbindung auf der Basis von Gitterschwingungen zurückgeht (13). 1955 verbrachte Schafroth 3 Monate in Princeton am Institute for Advanced Study und diskutierte mit Leon Cooper. Schafroths Theorie ist allgemeiner als die mit dem Physik-Nobelpreis 1972 ausgezeichnete Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie. (Quelle: (14), S. 452-453)

¹³⁾ Herbert Fröhlich, *Physical Review* **79**, 1950, S. 845. *Proceedings of the Royal Society* **A215**, 1952, S. 291.

¹⁴⁾ Charles P. Enz: "No Time to be Brief". A scientific biography of Wolfgang Pauli. Oxford University Press, 2002.

¹⁵⁾ R. Graham, F. Haake, *Zeitschrift für Physik* **211**, 1968, S. 411.

¹⁶⁾ Peter T. Landsberg: "Photons at non-zero chemical potential". *J. of Phys.* **C 14**, 1981, L 1025 - L 1027. Eckehard Schöll, Peter. T. Landsberg: "Nonequilibrium kinetics of coupled photons and electrons in two-level systems of laser type". *Journal of the Optical Society of America* **73**, 1983, S. 1197.

¹⁷⁾ Einstein in einem Brief vom 04.12.1926 an Max Born: " Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, das *der* nicht würfelt. ...".
Albert Einstein, Max Born, Briefwechsel 1916-1955, rororo, Reinbek, 1972, S. 98.

¹⁸⁾ Die Schreibweise von John Lewis et al. ist hier benutzt. Siehe M. van den Berg, J. T. Lewis, M. Lunn: "On the General theory of Bose-Einstein Condensation and the State of the Free Boson Gas". DIAS-STP-86-15. Dublin Institute for Advanced Studies, School of Theoretical Physics, 1986.

¹⁹⁾ Eberhard E. Müller: "Bose-Einstein Condensation in Dependence of the Mean Energy Limit". *Annals of Physics* **184**, 1988, S. 219-230.
For a correction of the limit expression of the entropy density, note Eberhard E. Müller: "Theoretical and Experimental Status of Bose-Einstein Condensation of Photons", in *Group Theoretical Methods in Physics, Proceedings of the XIX International Colloquium, Salamanca, Spain, 1992*. Eds. M. A. Olmo, M. Santander and J. Mateos Guilarte, *Anales de Fisica, Monografias*.

Ciemat. Vol. II, S. 475-478.

²⁰⁾ H. Weyl: "Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialoperatoren". Math. Ann. **71**, 1912, S. 441-479.

²¹⁾ Marc Kac: "Can one hear the shape of a drum?" American Mathematical Monthly **73**, 1966, S. 1-23.

²²⁾ H. P. Baltes, E. R. Hilf, Spectra of Finite Systems. B.I.-Wissenschaftsverlag, Zürich, 1976.

²³⁾ M. van den Berg: "On the asymptotics of heat equation and bounds on traces associated with the Dirichlet Laplacian". Preprint, DIAS-STP-84-44, Dublin Institute for Advanced Studies, School of Theoretical Physics, 1984.

²⁴⁾ Res Jost, Quantenmechanik II, Verlag der Fachvereine an der ETH Zürich, Zürich 1973.

²⁵⁾ John David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley, New York 1975.